

Спираль Фибоначчи. Число "фи".

Даже истинные мнения стоят немногого, пока кто-нибудь не соединит их связью причинного рассуждения. Платон.

Начать разработку этого материала мне помогла книга Д.Брауна "Код да Винчи". В качестве кода герой книги использует несколько чисел из ряда Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Я нашел дополнительный материал по этой теме [1] и [2]. В итоге многие мои разработки уроков пополнились.

Например, первый урок математики в пятом классе по теме: "Обозначение натуральных чисел". Говоря о бесконечной последовательности натуральных чисел, я отметил наличие других рядов, например, ряда Фибоначчи и ряда "треугольных чисел": 1, 3, 6, 10, ...

В восьмом классе при изучении иррациональных чисел, наряду с числом "пи", я привожу число "фи" ($\Phi=1,618\dots$). (У Д. Брауна это число называют "пфи", что, считает автор, даже круче "пи"). Я прошу учеников загадать два числа, а затем образовать ряд по "принципу" ряда Фибоначчи. Каждый рассчитывает свою последовательность до десятого члена. Например, 7 и 13. Построим последовательность: 7, 13, 20, 33, 53, 86, 139, 225, 354, 589, ... Уже при делении девятого члена на восьмой появляется число Фибоначчи.

История жизни.



Итальянский купец Леонардо из Пизы (1180-1240), более известный под прозвищем Фибоначчи был значительным математиком средневековья. Роль

его книг в развитии математики и распространении в Европе математических знаний трудно переоценить.

Жизнь и научная карьера Леонардо теснейшим образом связана с развитием европейской культуры и науки.

До эпохи Возрождения было еще далеко, однако история даровала Италии краткий промежуток времени, который вполне можно было назвать репетицией надвигающейся эпохи Ренессанса. Этой репетицией руководил Фридрих II, император Священной Римской империи. Воспитанный в традициях южной Италии Фридрих II был внутренне глубоко далек от европейского христианского рыцарства. Рыцарские турниры Фридрих II совсем не признавал. Вместо этого он культивировал математические соревнования, на которых противники обменивались не ударами, а задачами.

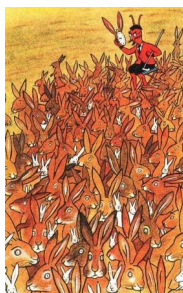
На таких турнирах и заблистал талант Леонардо Фибоначчи. Этому способствовало хорошее образование, которое дал сыну купец Боначчи, взявший его с собой на Восток и приставивший к нему арабских учителей. Встреча между Фибоначчи и Фредериком II произошла в 1225 году и была событием большой важности для города Пизы. Император ехал верхом во главе длинной процессии трубачей, придворных, рыцарей, чиновников и бродячего зверинца животных. Некоторые проблемы, которые Император поставил перед знаменитым математиком, подробно изложены в Книге абака. Фибоначчи, очевидно, решил проблемы, поставленные Императором, и навсегда стал желанным гостем при Королевском дворе. Когда Фибоначчи перерабатывал Книгу абака в 1228 году, он посвятил исправленную редакцию Фредерику II. Всего он написал три значительных математических труда: Книга абака, опубликованная в 1202 году и переизданная в 1228 году, Практическая геометрия, опубликованная в 1220 году, и Книга квадратур. По этим книгам, превосходящим по своему уровню арабские и средневековые европейские

сочинения, учили математику чуть ли не до времен Декарта. Как указано в документах 1240 года, восхищенные граждане Пизы говорили, что он был "рассудительный и эрудированный человек", а не так давно Жозеф Гиз, главный редактор Британской Энциклопедии заявил, что будущие ученые во все времена "будут отдавать свой долг Леонардо Пизанскому, как одному из величайших интеллектуальных первопроходцев мира".

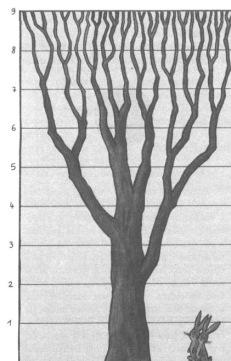
Задача о кроликах.

Наибольший интерес представляет для нас сочинение "Книга абака". Эта книга представляет собой объемный труд, содержащий почти все арифметические и алгебраические сведения того времени и сыгравший значительную роль в развитии математики в Западной Европе в течении нескольких следующих столетий. В частности, именно по этой книге европейцы познакомились с индусскими (арабскими) цифрами. Материал поясняется на примерах задач, составляющих значительную часть этого тракта.

В данной рукописи, Фибоначчи поместил следующую задачу:
 "Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течении года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет др. пару, а рожают кролики со второго месяца после своего рождения."



Кролики часы	Родители	Дети	Внуки	Правнуки	Число Фибоначчи
1	1				1
2	1				1
3	1	1			2
4	1	2			3
5	1	3	1		5
6	1	5	2		8
7	1	8	5	1	13
8	1	13	8	2	21
9	1	21	13	5	34
10	1	34	21	8	55
11	1	55	34	13	89
12	1	89	55	21	144



Ясно, что если считать первую пару кроликов новорожденными, то на второй месяц мы будем по прежнему иметь одну пару; на 3-й месяц - $1+1=2$; на 4-й - $2+1=3$ пары (ибо из двух имеющихся пар потомство дает лишь одна пара); на 5-й месяц - $3+2=5$ пар (лишь 2 родившиеся на 3-й месяц пары дадут потомство на 5-й месяц); на 6-й месяц - $5+3=8$ пар (ибо потомство дадут только те пары, которые родились на 4-м месяце) и т. д. Таким образом, если обозначить число пар кроликов, имеющих на n-м месяце через F_n , то $F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5, F_6=8, F_7=13, F_8=21$ и т. д., причем образование этих чисел регулируется общим законом: $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ при всех $n>2$, ведь число пар кроликов на n-м месяце равно числу F_{n-1} пар кроликов на предшествующем месяце плюс число вновь родившихся пар, которое совпадает с числом F_{n-2} пар кроликов, родившихся на (n-2)-ом месяце (ибо лишь эти пары кроликов дают потомство).

Числа F_n , образующие последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... называются "числами Фибоначчи", а сама последовательность - последовательностью Фибоначчи.

Особые названия этому соотношению начали давать еще до того, как Лука Пачиоли (средневековый математик) назвал его Божественной пропорцией. Кеплер назвал это соотношение одним из сокровищ геометрии. В алгебре общепринято его обозначение греческой буквой "фи" ($\Phi=1.618033989\dots$).

Ниже приведены отношения второго члена к первому, третьего ко второму, четвертого к третьему, и так далее:

$$1:1 = 1.0000, \text{ что меньше фи на } 0.6180$$

$$2:1 = 2.0000, \text{ что больше фи на } 0.3820$$

$$3:2 = 1.5000, \text{ что меньше фи на } 0.1180$$

$$5:3 = 1.6667, \text{ что больше фи на } 0.0486$$

$$8:5 = 1.6000, \text{ что меньше фи на } 0.0180$$

По мере нашего продвижения по суммационной последовательности Фибоначчи каждый новый член будет делить следующий со все большим и большим приближением к

недостижимому "фи". Колебания соотношений около значения 1.618 на большую или меньшую величину мы обнаружим в Волновой теории Эллиотта, где они описываются Правилем чередования. Следует обратить внимание, что в природе встречается именно приближение к числу "фи", тогда как математика оперирует с "чистым" значением. Его ввел Леонардо да Винчи и назвал "золотым сечением" (золотая пропорция). Среди его современных названий есть и такие, как "золотое среднее" и "отношение вертящихся квадратов". Золотая пропорция – это деление отрезка AC на две части таким образом, что большая его часть AB относится к меньшей части BC так, как весь отрезок AC относится к AB, то есть: $AB:BC=AC:AB=\Phi$ (точное иррациональное число "фи").

При делении любого члена последовательности Фибоначчи на следующий за ним получается обратная к 1.618 величина ($1 : 1.618=0.618$). Это тоже весьма необычное, даже замечательное явление. Поскольку первоначальное соотношение - бесконечная дробь, у этого соотношения также не должно быть конца.

При делении каждого числа на следующее за ним через одно, получаем число 0.382.
 $1:0.382=2.618$

Подбирая таким образом соотношения, получаем основной набор коэффициентов Фибоначчи: 4.235, 2.618, 1.618, 0.618, 0.382, 0.236. Все они играют особую роль в природе и в частности в техническом анализе.

Просто удивительно, сколько постоянных можно вычислить при помощи последовательности Фибоначчи, и как ее члены проявляются в огромном количестве сочетаний. Однако не будет преувеличением сказать, что это не просто игра с числами, а самое важное математическое выражение природных явлений из всех когда-либо открытых.

Эти числа, бесспорно, являются частью мистической естественной гармонии, которая приятно осязается, приятно выглядит и даже приятно звучит. Музыка, например, основана на 8-ми нотной октаве. На фортепьяно это представлено 8 белыми клавишами и 5 черными - всего 13.

Более наглядное представление можно получить, изучая спирали в природе и произведениях искусства. Сакральная геометрия исследует два вида спиралей: спираль золотого сечения и спираль Фибоначчи. Сравнение этих спиралей позволяет сделать следующий вывод. Спираль золотого сечения идеальна: у нее нет начала и нет конца, она продолжается бесконечно. В отличие от нее спираль Фибоначчи имеет начало. Все природные спирали – это спирали Фибоначчи, а в произведениях искусства используются обе спирали, иногда одновременно.

Математика.

Геометрия владеет двумя сокровищами – теоремой Пифагора и золотым сечением, и если первое из них можно сравнить с мерой золота, то второе – с драгоценным камнем.

Йоган Кеплер

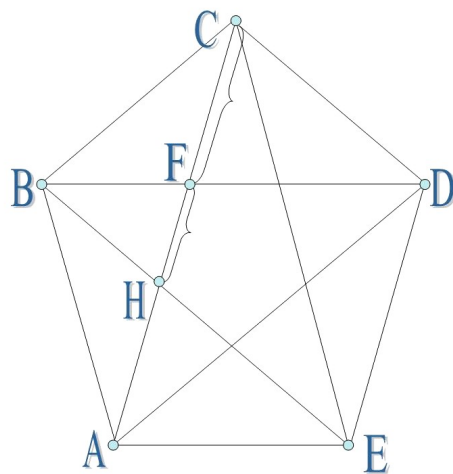
Пентаграмма (пентакль, пятиконечная звезда) - один из часто используемых символов. Пентаграмма – символ совершенного человека, стоящего на двух ногах с разведенными руками. Можно сказать, что человек – живая пентаграмма. Это верно как в физическом, так и в духовном плане – человек обладает пятью добродетелями и проявляет их: любовь, мудрость, истина, справедливость и доброта. Это добродетели Христа, которые можно представить пентаграммой. Эти пять добродетелей, необходимые для развития человека, непосредственно связаны с человеческим организмом: доброта связана с ногами, справедливость - с руками, любовь – со ртом, мудрость – с ушами, глаза – с истиной. Истина принадлежит духу, любовь - душе, мудрость - интеллекту, доброта – сердцу, справедливость – воде. Существует также соответствие между человеческим организмом и пятью элементами (земля, вода, воздух, огонь и эфир): воля соответствует земле, сердце – воде, интеллект - воздуху, душа - огню, дух - эфиру. Таким образом, своей волей, интеллектом, сердцем, душой, духом человек связан с пятью элементами, работающими в космосе, и он может сознательно работать в гармонии с ним. Именно в этом смысл

другого символа – двойной пентаграммы, человек (микрокосм) живет и действует внутри вселенной (микрокосма).

Перевернутая пентаграмма изливает энергию в Землю и, следовательно, является символом материалистических тенденций, тогда как обычная пентаграмма направляет энергию вверх, являясь, таким образом, духовной. В одном все согласны: пентаграмма, безусловно, представляет "духовную форму" человеческой фигуры.



Обратите внимание $CF:FN=CH:CF=AC:CH=1,618$. Действительные пропорции этого символа основаны на священной пропорции, называемой золотым сечением: это такое положение точки на любой проведенной линии, когда она делит линию так, что меньшая часть находится в том же соотношении к большей части, что и большая часть к целому. Кроме того, правильный пятиугольник в центре позволяет утверждать, что пропорции сохраняются и для бесконечно малых пятиугольников. Эта «божественная пропорция» проявляется в каждом отдельном луче пентаграммы и помогает объяснить тот трепет, с которым математики во все времена взирали на этот символ. Причем, если сторона пятиугольника равна единице, то диагональ равна 1,618.



Многие пытались разгадать секреты пирамиды в Гизе. В отличие от других египетских пирамид это не гробница, а скорее неразрешимая головоломка из числовых комбинаций. Замечательные изобретательность, мастерство, время и труд архитекторов пирамиды, использованные ими при возведении вечного символа, указывают на чрезвычайную важность послания, которое они хотели передать будущим поколениям. Их эпоха была дописьменной, доиероглифической и символы были единственным средством записи открытий.

Ученые обнаружили, что три пирамиды в Гизе выстроены по спирали. В 1980-е годы было установлено, что там присутствуют и золотосеченная спираль и спираль Фибоначчи.

Ключ к геометро-математическому секрету пирамиды в Гизе, так долго бывшему для человечества загадкой, в действительности был передан Геродоту храмовыми жрецами, сообщившими ему, что пирамида построена так, чтобы площадь каждой из ее граней была равна квадрату ее высоты.

Площадь треугольника

$$356 \times 440 / 2 = 78320$$

Площадь квадрата

$$280 \times 280 = 78400$$

Длина грани пирамиды в Гизе равна 783.3 фута (238.7 м), высота пирамиды -484.4 фута (147.6 м). Длина грани, деленная на высоту, приводит к соотношению $\Phi=1.618$. Высота 484.4 фута соответствует 5813 дюймам (5-8-13) - это числа из последовательности Фибоначчи.

Эти интересные наблюдения подсказывают, что конструкция пирамиды основана на пропорции $\Phi=1,618$. Современные ученые склоняются к интерпретации, что древние египтяне построили ее с единственной целью - передать знания, которые они хотели сохранить для грядущих поколений. Интенсивные исследования пирамиды в Гизе показали, сколь обширными были в те времена познания в математике и астрологии. Во всех внутренних и внешних пропорциях пирамиды число 1.618 играет центральную роль. Не только египетские пирамиды построены в соответствии с совершенными пропорциями золотого сечения, то же самое явление обнаружено и у мексиканских пирамид. Возникает мысль, что как египетские, так и мексиканские пирамиды были возведены приблизительно в одно время людьми общего происхождения.

Биология.



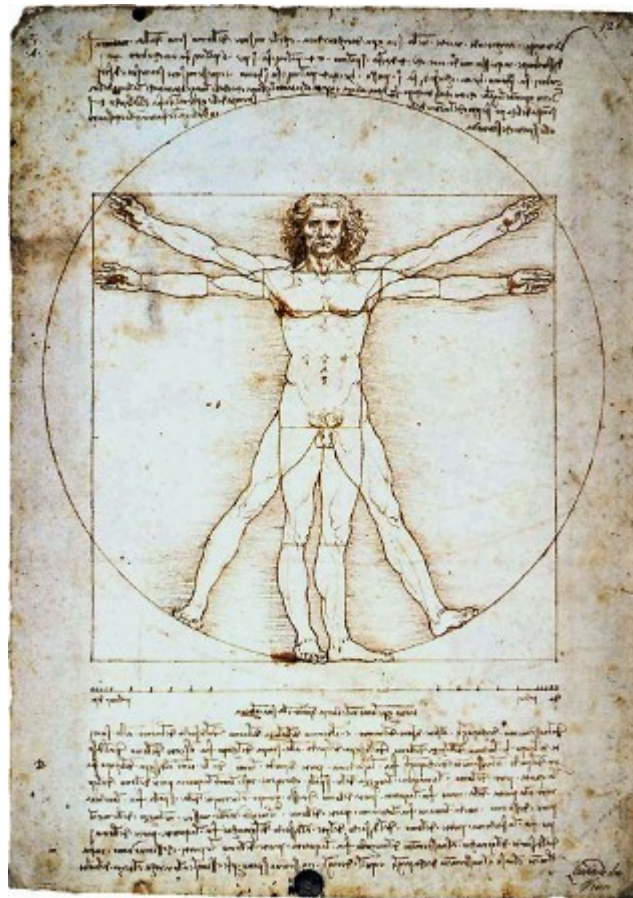
В 19 веке ученые заметили, что цветки и семена подсолнуха, ромашки, чешуйки в плодах ананаса, хвойных шишках и т. д. "упакованы" по двойным спиральям, завивающимся навстречу друг другу. При этом числа "правых" и "левых" спиралей всегда относятся друг к другу, как соседние числа Фибоначчи (13:8, 21:13, 34:21, 55:34). Многочисленные примеры двойных спиралей, встречающихся повсюду в природе, всегда соответствуют этому правилу.

Еще Гете подчеркивал тенденцию природы к спиральности. Винтообразное и спиралевидное расположение листьев на ветках деревьев подметили давно. Спираль увидели в расположении семян подсолнечника, в шишках сосны, ананасах, кактусах и т.д. Работа ботаников и математиков пролила свет на эти удивительные явления природы. Выяснилось, что в расположении листьев на ветке семян подсолнечника, шишек сосны проявляется ряд Фибоначчи, а стало быть, проявляется закон золотого сечения. Паук плетет паутину спиралеобразно. Спиралью закручивается ураган. Испуганное стадо

северных оленей разбегается по спирали. Молекула ДНК закручена двойной спиралью. Гете называл спираль "кривой жизни".

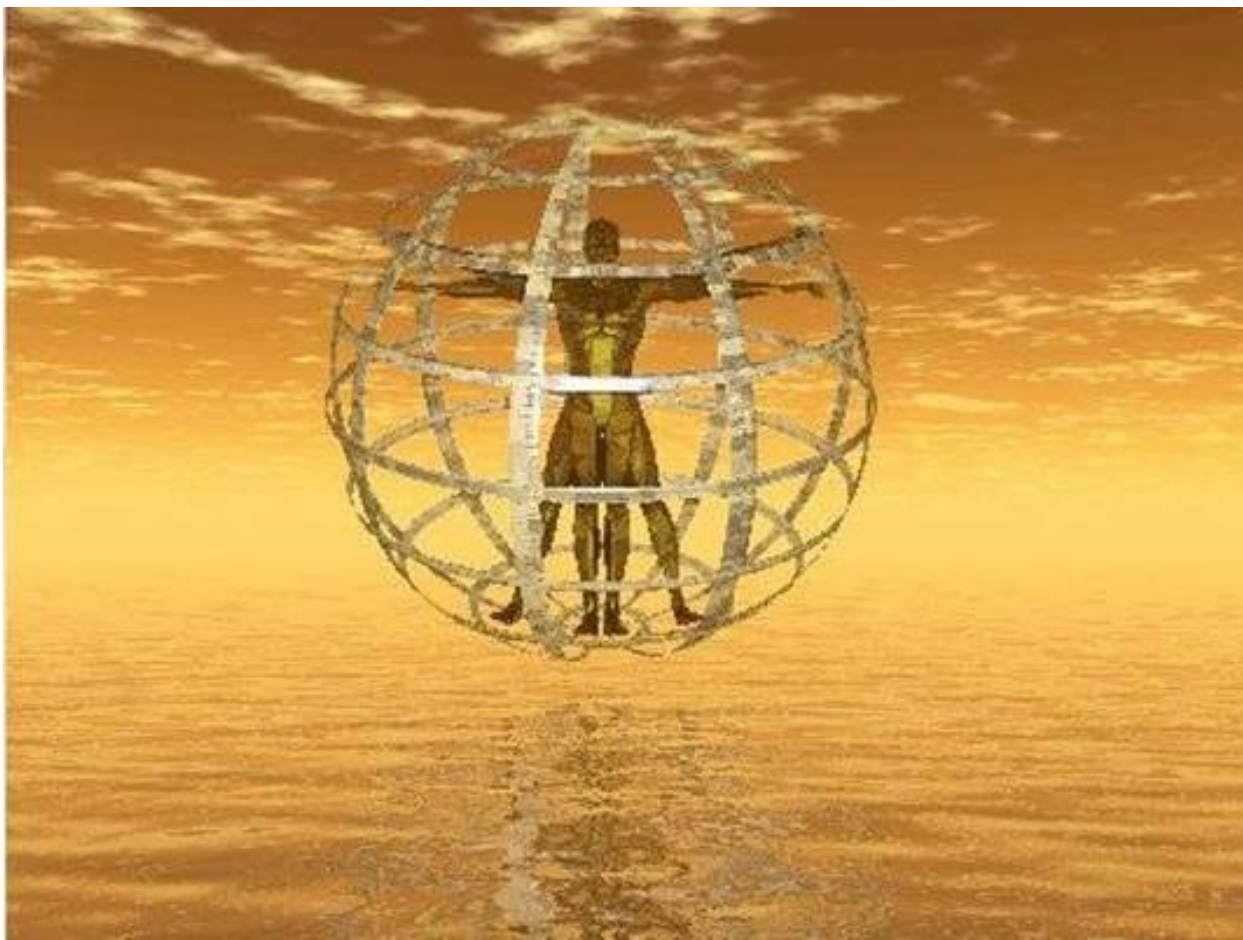
В любой хорошей книге в качестве примера показывают раковину наутилуса. Причем во многих изданиях сказано, что это спираль золотого сечения, но это неверно – это спираль Фибоначчи. Можно увидеть совершенство рукавов спирали, но если посмотреть на начало, то он не выглядит таким совершенным. Два самых внутренних ее изгиба фактически равны. Второй и третий изгибы чуть ближе приближаются к фи. Потом, наконец, получается эта изящная плавная спираль. Вспомните отношения второго члена к первому, третьего ко второму, четвертого к третьему, и так далее. Будет понятно, что моллюск точно следует математике ряда Фибоначчи.

Числа Фибоначчи проявляются в морфологии различных организмов. Например, морские звезды. Число лучей у них отвечает ряду чисел Фибоначчи и равно 5, 8, 13, 21, 34, 55. У хорошо знакомого комара - три пары ног, брюшко делится на восемь сегментов, на голове пять усиков - антенн. Личинка комара членится на 12 сегментов. Число позвонков у многих домашних животных равно 55. Пропорция "фи" проявляется и в человеческом теле.



Друнвало Мелхиседек в книге "Древняя тайна Цветка Жизни" пишет: "Да Винчи вычислил, что, если нарисовать квадрат вокруг тела, потом провести диагональ от ступней до кончиков вытянутых пальцев, а затем провести параллельную горизонтальную линию (вторую из этих параллельных линий) от пупка к стороне квадрата, то эта горизонтальная линия пересечет диагональ точно в пропорции фи, как и вертикальную линию от головы до ступней. Если считать, что пупок находится в той совершенной точке, а не слегка выше для женщин или чуть ниже для мужчин, то это означает, что тело человека поделено в пропорции фи от макушки до ступней... Если бы эти линии были единственными, где в человеческом теле имеется пропорция фи, это, вероятно, было бы только интересным фактом. На самом деле пропорция фи обнаруживается в тысячах мест по всему телу, а это не просто совпадение. Вот некоторые явные места в теле человека, где обнаруживается пропорция фи. Длина каждой фаланги пальца находится в пропорции фи к следующей фаланге... Та же пропорция отмечается для всех пальцев рук и ног. Если соотнести длину предплечья с длиной ладони, то получится пропорция фи, так же длина плеча относится к длине предплечья. Или отнесите длину голени к длине стопы и длину бедра к длине голени. Пропорция фи обнаруживается во всей скелетной системе. Она

обычно отмечается в тех местах, где что-то сгибается или меняет направление. Она также обнаруживается в отношениях размеров одних частей тела к другим. Изучая это, все время удивляешься".



Заключение.

Хотя он и был величайшим математиком средних веков, единственные памятники Фибоначчи - это статуя напротив Пизанской башни через реку Арно и две улицы, которые носят его имя, одна - в Пизе, а другая - во Флоренции.

Если поставить открытую ладонь вертикально перед собой, направив большой палец к лицу, и, начиная с мизинца, последовательно сжимать пальцы в кулак, получится движение, которое есть спираль Фибоначчи.

Литература:

1. Энзэнзбергер Ханс Магнус
Дух числа. Математические приключения. – Пер. с англ. – Харьков: Книжный Клуб "Клуб Семейного Досуга", 2004. – 272 с.
2. Энциклопедия символов /сост. В.М. Рошаль. – Москва: АСТ; СПб.; Сова, 2006. – 1007 с.